XI Congreso Nacional de Teledetección, 21-23 septiembre 2005.
Puerto de la Cruz. Tenerife.

Aplicación de técnicas fractales al estudio de la evolución del nivel medio del mar a partir de datos altimétricos del Mar Mediterráneo

M. Arias Ballesteros, P. Villares Durán, J.J. Alonso del Rosario[(1)], *M. Catalán Pérez-Urquiola*

Dpto. Física Aplicada (Oceanografía Física). Universidad de Cádiz.Avda República Saharaui s/n, Puerto Real, 11510, Cádiz, España.[(1)]E-mail: josejuan.alonso@uca.es

Resumen

La determinación del nivel medio del mar (NMM) y su evolución temporal constituye uno de los mayores problemas para la comunidad científica ya que la mayoría de la población habita en zonas costeras. Los estudios clásicos sobre el NMM se realizan mediante la reducción de los datos de elevación del nivel del mar y el uso de técnicas de regresión para obtener la tasa de cambio. Con esto se pierde información de la geometría contenida en las series de datos. Los autores analizan los datos de radar altímetro provenientes del satélite TOPEX/Poseidon sobre la cuenca mediterránea y Atlántico oriental ibérico, mediante técnicas de geometría fractal para determinar la dimensión del atractor del sistema dinámico que es el NMM.

1. Introducción

Un *fractal* es un objeto geométrico no usual con una dimensión mayor que su dimensión topológica [7]. También se les ha llamado *monstruos matemáticos* [11] porque presentan características geométricas extrañas respecto a los conjuntos usuales. Dentro de la denominación *fractal* se incluyen los espacios vectoriales de dimensión no entera o de transición. Su estudio comenzó con Hausdorff en 1919 y continúa en la actualidad con aplicaciones a muchos campos de la ciencia como en Geología [5], Sismología [4], Oceanografía [9] y otros. Un resumen de la teoría fractal y su evolución se puede encontrar en [8].

Hay tres tipos de conjuntos fractales: a) Objetos geométricos comunes, b) Objetos regulares auto-similares y c) Objetos irregulares auto-similares cuya dimensión fractal es mucho mayor que su dimensión topológica. Al primer grupo pertenecen todos los objetos geométricos usuales: puntos, líneas, etc. Los más interesantes son el segundo y el tercero porque a ellos pertenecen los atractores y atractores extraños de los sistemas dinámicos.

En las ramas aplicadas de la Física no se tratan entidades matemáticas perfectas. Los modelos matemáticos de geometría fractal para procesos físicos poseen cuatro características [7][10]: a) Son difíciles de realizar porque requieren mucha potencia de cálculo, b) Es un método de clasificación, c) Dependen del rango de valores que tome la propiedad física y de su evolución en el tiempo y d) Suelen presentar varias escalas (temporales y/o espaciales) inmersas en el mismo registro. La interpretación de los resultados depende de la física del fenómeno y de su formulación. Aunque la teoría fractal se desarrolló para el tratamiento de imágenes, es posible aplicarla a objetos que se miden uni-dimensionalmente como las series temporales. Además, debido a la coexistencia de varias escalas en el mismo fenómeno, en vez de hablar de fractales hay que emplear la denominación *multifractal*. Esta es, quizás, la propiedad geométrica más importante de las estructuras geométricas de al naturaleza.

Actualmente hay dos referencias relativas a la aplicación de la teoría fractal a datos de marea. En [1] se analizó, mediante técnicas fractales, series temporales de alta precisión de mareas terrestres (con nivel de ruido de pocos pico-gales) tomadas con gravímetros superconductores. Definió un parámetro denominado estabilidad de la estación y dio una clasificación para las estaciones de marea gravimétrica. También concluyó que, estaciones de medidas que producen series muy armónicas y fácilmente predecibles, pueden ser fractalmente (geométricamente) muy distintas. En [2] se analizaron fractalmente las series temporales de las estaciones de marea de Algeciras, Ceuta y Málaga, poniendo de manifiesto problemas internos de las series temporales, invisibles a las técnicas de análisis clásicas empleadas en Oceanografía Física.

En el presente estudio, los autores aplican el concepto de dimensión fractal a datos de altímetro en la cuenca Mediterránea. El trabajo ha sido organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presentan las bases para encuadrar la teoría fractal en el análisis de datos de elevación del nivel del mar. La Sección 3 está dedicada a presentar los resultados y a su discusión. Finalmente en la sección 4 se detallan las conclusiones.

2.- Geometría fractal y su aplicación a series de altímetro

Dentro del muy extenso cuerpo de la teoría fractal hay dos conceptos claves que es imprescindible discutir en el marco de su aplicación al análisis de registros de altímetro marea: dimensión y auto-similaridad.

2.1.- Dimensiones

La dimensión de un espacio, vectorial o funcional, es el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar la localización de un punto en él. Las dimensiones de un espacio pueden ser contraídas entorno a puntos con características singulares pertenecientes al propio espacio, así surgen puntos, líneas, superficies planas, superficies de tres dimensiones y el dominio tetra-dimensional de espacio-tiempo o universo de Minkowski. Es posible elegir un sistema de referencia adaptado a las necesidades del problema mediante un cambio de coordenadas, el cual se puede entender como una deformación del cuerpo o una deformación del propio espacio, pero sin alterar la dimensión del espacio.

Para objetos geométricos sencillos el cálculo de su dimensión no reviste problemas de importancia tal y como se muestra en [7]. Sin embargo hay muchos objetos cuya dimensión es desconocida *a priori* como los atractores y atractores extraños en el espacio de fases de un sistema dinámico. Es a consecuencia de la existencia de estos objetos la necesidad de definir métodos para la estimación de la dimensión.

La estima de la dimensión D_q de un atractor en el espacio de fases generado por una serie temporal se puede llevar a cabo de muchas formas. Una de las más rápidas y fiables es a través de las *diferencias temporales* y aplicando el teorema de Takens [12]. La expresión general de la dimensión fractal es [6]:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(C_q(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \qquad (1)$$

siendo ε el tamaño de paso y $C_q(\varepsilon)$ es la integral de correlación generalizada definida como:

$$C_q(\varepsilon) = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \theta(\varepsilon - |y_i - y_j|) \right]^{q-1} \right]^{\frac{1}{q-1}} \qquad (2)$$

Siendo q el tipo de dimensión, M es la "*dimensión envolvente*", y_k denota la órbita k-ésima empleada para la construcción de la matriz de Takens y $\theta(\cdot)$ es la función de Heaviside. Una introducción sencilla al problema y a su interpretación se puede encontrar en [3]. Es posible calcular dimensiones de orden superior a 2, pero su interpretación no es clara. Los tres tipos de dimensiones que suelen ser calculados son: con $q=0$ se obtiene la dimensión de Hausdorff, D_0, la cual coincide con la calculada empleando el método del recuento de cajas (*box-counting*) [7]; con $q=1$ se obtiene la dimensión de información, D_1; con $q=2$ se obtiene la dimensión de correlación, D_2. El problema de la aplicación de D_0 reside en que no tiene en cuenta la densidad de puntos, dando la misma importancia a las cajas que contienen un punto que a las que están completamente llenas de ellos. D_1 corrige el problema de la densidad de puntos, sin embargo no es una buena elección al tratar con series temporales porque no tiene en cuenta la repetición, la correlación, de las órbitas. Para tratar con series temporales se debe considerar el uso de D_2, ya que corrige tanto la densidad de puntos como la correlación existente entre órbitas, dando un valor de dimensión no sesgado excepto por la propia longitud de la serie. En este estudio se tratarán series temporales que, si bien abarcan mucho tiempo (decena de años), su muestreo no es el óptimo, por lo que los resultados han de se evaluados con reservas.

Para calcular D_q se procede de la siguiente forma: Se realiza la representación de $C_q(\varepsilon)$ frente a ε (figura 1 en escala lineal). El segmento 3 corresponde a valores de ε demasiado elevados y el segmento 1 a los demasiado pequeños. Solamente el segmento 2 da información acerca de las propiedades geométricas del conjunto y corresponde a valores adecuados de la longitud de paso y se denomina *región de escalado*. Una regresión lineal dará la pendiente de la curva en tal región que será la q-dimensión fractal.

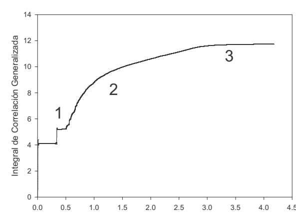

Figura 1: Cálculo de la dimensión fractal

2.2. Autosimilaridad

El rango dado por el radar altímetro, una vez efectuadas todas las correcciones geofísicas necesarias, es el resultado observado de un sistema dinámico multidimensional. El número de parámetros necesarios para determinar la posición de una partícula en el tiempo t es $3N+1$, siendo N el número de ondas tenidas en cuenta en una descomposición de Fourier, habiendo considerado las amplitudes, fases, las frecuencias y el nivel medio:

$$\eta(t) = z_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bullet \cos(\omega_i \bullet t + \phi_i) \qquad (3)$$

donde $\eta(t)$ es la posición de la partícula respecto al nivel medio z_0, A_i es la amplitud, ω_i es la frecuencia y ϕ_i es la fase. El símbolo de infinito denota "todas las ondas necesarias". Naturalmente ese número depende de la longitud del registro. El modelo 3 describe la proyección del espacio de fases en la vertical de un oscilador forzado entorno a un punto de equilibrio, el nivel medio. Tal punto, caso de ser perfectamente estable (inmóvil), debe poseer una dimensión geométrica nula y sería un objeto geométrico común. Como en los datos del radar altímetro se incluyen ondas de escala temporal muy distintas, se está tratando de un multifractal. El atractor, la posición del nivel medio del mar, puede ser super-atractivo, atractivo, indiferente o repulsivo en el caso de ausencia de ruido. Además, la descomposición de la expresión 3 no es perfecta en ningún caso ya que el mismo muestreo limita el número de ondas.

Debido a esto, la Geometría Fractal aporta herramientas de sencillez y potencia extrema. Da información acerca de la fuerza del atractor, que puede ser entendida como la estimación numérica, en promedio, de la derivada de la ecuación de movimiento evaluada en un entorno del punto de interés, estimando la tasa de movimiento del atractor y, en consecuencia, la tasa de movimiento del nivel medio. [1] y [2] concluyen que es un parámetro que caracteriza la estabilidad de la estación.

El concepto fundamental en el que se basa el análisis fractal de los registros de marea es la autosimilaridad o de invariancia de escala. En base al modelo matemático resumido en la expresión 3, el registro de marea se debe considerar auto afín o auto similar. Esto resulta perfectamente válido para series de Fourier infinitas, pero si ésta es truncada, como es el caso, cualquier alteración de la escala actuará como un filtro. Por este motivo se deben definir los valores máximo y mínimo para el tamaño de paso ε, el cual no puede comenzar con un $\varepsilon \to 0$. Solamente de esta forma se puede adaptar el concepto de autosimilaridad a registros de variables geofísicas.

El siguiente problema con el que se encuentra el investigador es con la coexistencia de movimientos con diferentes escalas temporales. Debido al carácter multifractal de la marea es necesario realizar cálculos con valores distintos de dimensión envolvente. A los efectos de cálculo se han considerado escalas típicas de marea de período largo: 3,6 y 12 meses. Hay que considerar además que los datos de marea que pueden ser sometidos al análisis fractal son aquellos sin picos, saltos debidos a fallos instrumentales, sin haber eliminado la marea astronómica. La razón fundamental es que el ruido y la eliminación de la marea astronómica no permiten observar la dinámica del atractor e impiden el cálculo de la dimensión fractal [1].

3. Resultados y discusión

Se han considerado los registros tomados de AVISO para los puntos de cruce del TOPEX/Poseidon en el Mar Mediterráneo y el Atlántico Ibérico. A todos los datos se les han aplicado las correcciones indicadas por AVISO y las series han pasado un exhaustivo control de calidad para eliminar los picos que no seguían la estadística de la propia serie. A los datos destinados al análisis fractal no se les ha aplicado las correcciones de marea siguiendo [1] y [2].

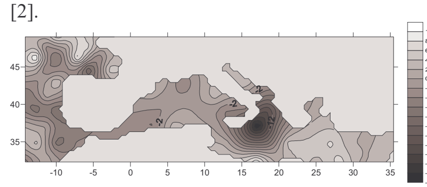

Figura 2: Tasa de cambio del nivel del mar mediante regresiones lineales

En la figura 2 se presenta la tasa de cambio del nivel del mar a partir de regresiones lineales. Se observan zonas donde la tendencia es a descender del orden de 2.2 cm/año al SE de Italia. En el océano Atlántico se observan celdas de aumento/descenso del nivel medio del mar que parecen siguen algún tipo de patrón indeterminado y que se analizará en futuros trabajos.

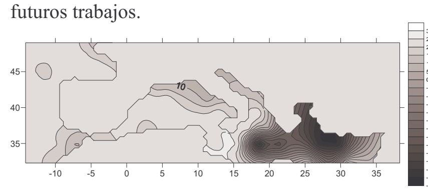

Figura 3: Tasa de cambio del nivel del mar mediante análisis fractal (*0.001 se expresan en mm/año)

En la figura 3 se presentan los valores de tendencia del nivel del mar calculados mediante geometría fractal. Se observan valores de descenso de algo más de 6mm/año para las mismas zonas y de ascenso de algo más de 1mm/año en otras.

La comparación entre ambas figuras denota que los resultados obtenidos mediante regresiones lineales indican un comportamiento más drástico de la evolución del nivel medio del mar que sería posible si y solo si la evaporación no fuera compensada por precipitación y descargas fluviales. Sin embargo los resultados provenientes del análisis fractal dan un comportamiento más suave.

Las zonas de aumento/descenso en la parte Atlántica han desaparecido dando un comportamiento homogéneo más acorde con fenómenos que afectan a grandes extensiones.

La validación de uno y otro resultado deberá esperar a que se dispongan de series de nivel del mar de alta calidad y lo suficientemente extendidas en el tiempo para poder llegar a conclusiones definitivas.

4. Conclusiones

Se han analizado los datos de nivel del mar sobre la cuenca mediterránea a partir de datos de altimetría en los puntos de cruce del satélite TOPEX/Poseidon mediante dos técnicas: regresiones lineales y análisis de geometría fractal. Los resultados difieren en un orden de magnitud. Las regresiones predicen tendencias ascendentes y descendentes de cerca de 2cm/año mientras que la técnica fractal predice descensos y ascensos en torno a 6 mm/año.

La validación de los resultados dependerá de la calidad y longitud temporal de las series que actualmente se están registrando.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto CGL2004-01473/CLI de la CICYT.

Referencias

[1] Alonso, J.J., 1998, *On the fractal dimension of Earth tides and characterization of gravity stations*. Bulletin d'Informations de Marees Terrestres, 129, pp 9963-9973.

[2] Alonso, J. Villares, M. González, Arias, M., Marín, B., 2005, *Ocean tides and fractal geometry: tidal station stability*. Thalassas (in press)

[3] Broomhead, D.S:, and King, G.P., 1985, *Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data*, Physica 20D, 217-236.

[4] Crossley, D.J. and Jensen, O.G., *Fractal Velocity Models in Refraction Seismology*, in Fractals in Geophysics, Eds C.H. Scholz & B.B. Mandelbrot, pp 61-76.

[5] García, J. & Otárola, F., 1994, *El uso de la geometría fractal en las Ciencias de la Naturaleza*. Revista de la S.A.E.M., nº 28, vol 10 (1).

[6] Grassberger, P. and Procaccia, I., 1984, *Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach*, Physica 13D, 34.

[7] Guzmán, M., Martín, M.A., Morán, M. & Reyes, M., 1993, *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Ed Labor.

[8] Mandelbrot, B.B., 1989, *Multifractal Measures, Especially for Geophysicist*, in Fractals in Geophysics, Eds C.H. Scholz & B.B. Mandelbrot, pp 5-42.

[9] A.Provenzale,AR.Osborne,AD.Kirwan and L. Bergamasco,1989. *Fractal Drifter Trajectories in the Kuroshio Extension*. *Tellus*, 41A:416-435.

[10] Pacheco, J.M., 1994, *Fractales y Oceanografía*. Revista de la S.A.E.M., nº 28, vol 10 (1).

[11]Pla, J., 1994, *Los fractales*. Revista de la S.A.E.M., nº 28, vol 10 (1).

[12] Takens, F., 1981, *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, D.A. Rand and L.S. Young eds. Springer Verlag.